追加練習問題

第１講　２次方程式の解の配置

x の方程式 $x^2-2kx-3k+4=0$ が $0<x<2$ に少なくとも１つ実数解をもつような k の範囲を求めよ.

第２講　絶対値付き２次方程式の解の個数

k を実数の定数として，x の方程式 $(x+1)|x-1|-kx+2k-1=0$ を考えるとき，異なる実数解を２つもつような k を求めよ．

第３講　加法定理について…

$\cos\dfrac{4}{9}\pi$ の小数第 2 位の数を求めよ.

第４講　三角関数の合成（応用編）

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする．a を正の定数とするとき

$$f(\theta) = a\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

の最大値を求めよ．

第５講　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の求め方

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ のとき $\cos 4\theta=\cos\theta$ であることを示して $\cos\theta$ の値を求めよ.

第６講　桁数などの計算

3^{2199} の最高位から 2 番目に大きい位の数を求めよ.

ただし，必要であれば $\log_{10}2=0.30103$，$\log_{10}3=0.47712$ を用いてもよい.

第７講　３次の極値などについて

a，b を実数の定数として $f(x)=x^3+ax^2+bx$ を考える．

$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値を $x=\beta$ で極小値をとるとする．

極値が 0 となる条件を求めよ．

第８講　接線の本数と実数解の個数

$f(x)=x^4-14x^3+61x^2-78x-6$ として $C: y=f(x)$ を考える．点 A$(7,\ 0)$ から C へ引いた接線の数を求めよ．

第９講　置き換えて３次，解の個数など

k を実数として x の方程式

$$64^x-12\cdot 32^x+39\cdot 16^x-(24+k)8^x+39\cdot 4^x-12\cdot 2^x+1=0$$

の異なる実数解の個数が３となる k の値を求めよ．

第 10 講　面積の公式

$f(x)=x^4-3x^3+7x^2-9x+4$，$g(x)=5(x-1)^3$ とする．

2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

第 11 講　絶対値付き積分

$f(x)=x-\int_0^2 |f(t)|\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

第 12 講　試行錯誤の数列

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0$，$a_2=1$ を満たし，$n \geqq 2$ に対して

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_{n-[\sqrt{a_n}]}=a_n \text{ のとき}) \\ a_n & (a_{n-[\sqrt{a_n}]} \neq a_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されるものとする．ただし，$\left[\sqrt{a_n}\right]$ は $\sqrt{a_n}$ 以下の最大整数を表すこととする．

このとき $a_n=365$ を満たす n の個数を求めよ．

第13講　応用漸化式

次の空欄にあてはまる最も適した数値を答えよ.

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=8$，$a_2=14$ を満たし

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=4n+4 \quad \cdots①$$

によって定義されているとする.

ここで①は

$a_{n+2}-2a_{n+1}+\boxed{\text{あ}}(n+1)+\boxed{\text{い}}=\boxed{\text{う}}(a_{n+1}-2a_n+\boxed{\text{あ}}n+\boxed{\text{い}})$ と変形できることより $a_{n+1}-2a_n=\boxed{\text{う}}^n-\boxed{\text{あ}}n-\boxed{\text{い}}$ …②を得る.

また①は

$a_{n+2}-3a_{n+1}+\boxed{\text{え}}(n+1)+\boxed{\text{お}}=\boxed{\text{か}}(a_{n+1}-3a_n+\boxed{\text{え}}n+\boxed{\text{お}})$ と変形できることより $a_{n+1}-3a_n=\boxed{\text{か}}^n-\boxed{\text{え}}n-\boxed{\text{お}}$ …③を得る.

②と③より $a_n=\boxed{\text{き}}^n-\boxed{\text{く}}^n+\boxed{\text{け}}n+\boxed{\text{こ}}$ となる.

第 14 講　漸化式の応用

関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は

$$f_1(x)=2x,\quad f_{n+1}(x)=x\int_0^2 tf'_n(t)\,dt+2\int_0^1 f_n(t)\,dt\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定められている．関数 $f_n(x)$ を求めよ．

第 15 講　漸化式と一般項の予想

次の漸化式により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を予想せよ.

(1)　$a_1=7$, $a_{n+1}=2a_n+3^n-n$

(2)　$a_1=2$, $a_2=9$, $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=2^n$

第16講　数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1a_{n+1}+2a_2a_n+\cdots+2^{n-1}a_na_2+2^na_{n+1}a_1=\frac{3^n}{n!},\quad a_1=1$$

で定められている．

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

第 17 講　和について

次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)(k+2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot 2^k}{(k+1)(k+2)}$

第 18 講　確率と数列

赤玉 3 球，白玉 3 球が入った袋がある．この袋から玉を同時に 2 球取り出し，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す．n 回の試行の後，袋に赤玉が 3 球残っている確率を p_n，2 球残っている確率を q_n，1 球残っている確率を r_n とする．

このとき，p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} をそれぞれ p_n，q_n，r_n を用いて表せ．

第19講　数学的帰納法

n を正の整数とする．任意の n について

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{4n+3}{2\sqrt{n+1}}-\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots①$$

が成立することを以下に示す．空欄に適切な数値または数式を入れよ．

《証明》

$n=1$ のとき，(①の左辺)$-$(①の右辺)$=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{4}>0$ より①は成り立つ．

$n=k\ (\geqq 1)$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\dfrac{4k+3}{2\sqrt{k+1}}-\dfrac{3}{2}$ を仮定する．

このとき

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\left(\frac{4(k+1)+3}{2\sqrt{(k+1)+1}}-\frac{3}{2}\right)$$

$$>\ \left(\boxed{\text{ウ}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\left(\frac{4(k+1)+3}{2\sqrt{(k+1)+1}}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\ \frac{\sqrt{16k^3+\boxed{\text{エ}}k^2+\boxed{\text{オ}}k+50}-\sqrt{16k^3+\boxed{\text{エ}}k^2+\boxed{\text{オ}}k+49}}{2\sqrt{(k+1)(k+2)}}$$

$$>\ 0$$

となるので，$n=k+1$ のときにも①が成り立つ．

　よって数学的帰納法より，任意の n に対して①が成り立つ．

第 20 講　ベクトルでの計算

A，B，P を同一平面上の点とし，A≠B とする．
以下の不等式で表される領域の面積を AB＝r を用いて表せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} \geqq \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \quad \text{かつ} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \leqq 0$$

第21講　球の取り扱い

A(0,　−4,　4)，$S : x^2+y^2+(z-2)^2=4$ とする．球面 S は光を通さないとして，点光源 A から光を放ったとき，xy 平面に現れる球面 S の影の境界の軌跡を求めよ．

第 22 講　三角形の五心とベクトル

三角形 ABC は AB＝2，BC＝3，CA＝4 を満たしている．

角 B の外角の二等分線と角 C の外角の二等分線の交点を K とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

第 23 講　ベクトルの利用法

2 つの球を S_1：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$，$S_2$：$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-7)^2=16$ とする．

　S_1 上の点を P，S_2 上の点を Q として，線分 PQ の長さが最小となるときの点 P と点 Q の座標を求めよ．

第24講　空間での垂線の足

A$(1,\ 1,\ 2)$，B$(2,\ 2,\ 2)$，C$(1,\ 2,\ 4)$，D$(2,\ -2,\ 0)$とする．

四面体ABCDの体積を求めよ．

追加練習問題解答

第１講　２次方程式の解の配置

x の方程式 $x^2-2kx-3k+4=0$ が $0<x<2$ に少なくとも１つ実数解をもつような k の範囲を求めよ．

【答】 $1\leqq k<\dfrac{4}{3}$

【解答】 $x^2-2kx-3k+4=0 \iff x^2+4=2k\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ より $C：y=x^2+4$ と

$l：y=2k\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ で考える．

l は傾き $2k$ で $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通る直線である．

C と l が接するとき，つまり $x^2-2kx-3k+4=0$ が重解をもつときは $(-k)^2-(-3k+4)=0$　$\therefore$ $k=-4,\ 1$ でこのときの重解は $x=k$ なので $0<x<2$ にあてはまるものは $k=1$．このとき傾きは $2k=2$ である．

C 上の点 $(0,\ 4)$ を l が通るとき $4=2k\left(0+\dfrac{3}{2}\right)$　$\therefore$ $k=\dfrac{4}{3}$ でこのときの傾きは $2k=\dfrac{8}{3}$，C 上の点 $(2,\ 8)$ を l が通るとき $8=2k\left(2+\dfrac{3}{2}\right)$　$\therefore$ $k=\dfrac{8}{7}$ でこのときの傾きは $2k=\dfrac{16}{7}$．

よって，求める条件は $2\leqq 2k<\dfrac{8}{3}$．ゆえに $1\leqq k<\dfrac{4}{3}$．

第2講　絶対値付き2次方程式の解の個数

> k を実数の定数として，x の方程式 $(x+1)|x-1|-kx+2k-1=0$ を考えるとき，異なる実数解を2つもつような k を求めよ．

【答】 0，1，$4+2\sqrt{2}$

【解答】 $(x+1)|x-1|-kx+2k-1=0 \iff (x+1)|x-1|-1=k(x-2)$ より
$f(x)=(x+1)|x-1|-1$ とおいて，$C : y=f(x)$ と $l : y=k(x-2)$ について考える．

l は傾き k で $(2,\ 0)$ を通る直線であり，

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)(x-1)-1 & (x-1\geqq 0 \text{ のとき})\\ (x+1)(-x+1)-1 & (x-1<0 \text{ のとき})\end{cases}=\begin{cases}x^2-2 & (x\geqq 1 \text{ のとき})\\ -x^2 & (x<1 \text{ のとき})\end{cases} \quad \text{となる．}$$

(Ⅰ)　$y=-x^2\ (x<1)$ と l は $k=0$ のとき $(0,\ 0)$ で接することと，l が $(1,\ -1)$ を通るとき $-1=k(1-2)$ より $k=1$ なので，

$$\text{曲線 } y=-x^2\ (x<1) \text{ と } l \text{ の共有点の個数は}\begin{cases}0 & (k<0 \text{ のとき})\\ 1 & (k=0,\ k\geqq 1 \text{ のとき})\\ 2 & (0<k<1 \text{ のとき})\end{cases}$$

(Ⅱ)　曲線 $y=x^2-2$ と l が接するときは $x^2-2=k(x-2) \iff x^2-kx+2k-2=0$ の判別式を考えて $(-k)^2-4(2k-2)=0$　$\therefore\ k=4\pm 2\sqrt{2}$ となりこのときの接点の x 座標は
$x=\dfrac{k}{2}=2\pm\sqrt{2}$ となるので，曲線 $y=x^2-2\ (x\geqq 1)$ と l は $k=4+2\sqrt{2}$ のとき $x=2+\sqrt{2}$ で接することになる．l が $(1,\ -1)$ を通るときは(Ⅰ)より $k=1$ なので，

$$\text{曲線 } y=x^2-2\ (x\geqq 1) \text{ と } l \text{ の共有点の個数は}\begin{cases}0 & (1<k<4+2\sqrt{2} \text{ のとき})\\ 1 & (k\leqq 1,\ k=4+2\sqrt{2} \text{ のとき})\\ 2 & (k>4+2\sqrt{2} \text{ のとき})\end{cases}$$

$$\text{(Ⅰ)，(Ⅱ)より実数解の個数は}\begin{cases}1 & (k<0,\ 1<k<4+2\sqrt{2} \text{ のとき})\\ 2 & (k=0,\ 1,\ 4+2\sqrt{2} \text{ のとき})\\ 3 & (0<k<1,\ k>4+2\sqrt{2} \text{ のとき})\end{cases}$$

よって異なる実数解の個数が2つとなるのは $k=0,\ 1,\ 4+2\sqrt{2}$．

第３講　加法定理について…

$\cos\dfrac{4}{9}\pi$ の小数第 2 位の数を求めよ.

【答】 7

【解答】 $\theta=\dfrac{4}{9}\pi$ とおくと，$3\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ なので $\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 8\cos^3\theta-6\cos\theta+1=0$ となり，$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $0<\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ であるから，$\cos\dfrac{4}{9}\pi$ は $8x^3-6x+1=0$ の $0<x<\dfrac{1}{2}$ の実数解である.

$f(x)=8x^3-6x+1$ とおくと $f'(x)=24x^2-6$ より $0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき $f'(x)<0$ となり，$f(0.17)=0.019304$，$f(0.18)=-0.033344$ より $f(x)=0$ の実数解は $0<x<\dfrac{1}{2}$ の範囲に 1 つだけ存在し，それは $0.17<x<0.18$ を満たす.

よって $0.17<\cos\dfrac{4}{9}\pi<0.18$ より求める小数第 2 位の数は 7.

第4講　三角関数の合成（応用編）

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする．a を正の定数とするとき

$$f(\theta)=a\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

の最大値を求めよ．

【答】 $\begin{cases} \dfrac{1+a+\sqrt{a^2-2a+2}}{2} & (0<a\leqq 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{a+2}{2} & (a>1 \text{ のとき}) \end{cases}$

【解答】 $f(\theta)=a\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a\times\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}+\dfrac{\sin 2\theta}{2}+\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{1-a}{2}\cos 2\theta+\dfrac{1+a}{2}$ である．ここで，実数 β を $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ

$\tan\beta=1-a$ を満たすものとし，$R=\dfrac{\sqrt{a^2-2a+2}}{2}$ とおくと $f(\theta)=R\sin(2\theta+\beta)+\dfrac{1+a}{2}$

また，$\beta \leqq 2\theta+\beta \leqq \dfrac{\pi}{2}+\beta$ である．

(Ⅰ)　$\tan\beta=1-a \geqq 0$ つまり $0<a\leqq 1$ のとき $0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}+\beta<\pi$ なので $2\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

つまり $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}$ のとき最大値 $R+\dfrac{1+a}{2}=\dfrac{1+a+\sqrt{a^2-2a+2}}{2}$ をとる．

(Ⅱ)　$\tan\beta=1-a<0$ つまり $a>1$ のとき $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，$0<\dfrac{\pi}{2}+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$2\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\beta$ つまり $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{a+2}{2}$ をとる．

以上より，最大値は $\begin{cases} \dfrac{1+a+\sqrt{a^2-2a+2}}{2} & (0<a\leqq 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{a+2}{2} & (a>1 \text{ のとき}) \end{cases}$．

第5講　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の求め方

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ のとき $\cos 4\theta=\cos\theta$ であることを示して $\cos\theta$ の値を求めよ.

【答】 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【解答】 $\theta=\frac{2}{5}\pi$ のとき $5\theta=2\pi$ なので $4\theta=2\pi-\theta$ となる.

よって $\cos 4\theta=\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$.

このとき $\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ なので

$$\begin{aligned}&\cos 4\theta=\cos\theta\\ \iff\ &8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=\cos\theta\\ \iff\ &(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0\end{aligned}$$

より $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，1，$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ であるが，$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<\cos\theta<\frac{1}{2}$ なので

$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

第６講　桁数などの計算

3^{2199} の最高位から２番目に大きい位の数を求めよ．

ただし，必要であれば $\log_{10}2=0.30103$，$\log_{10}3=0.47712$ を用いてもよい．

【答】　5

【解答】　$3^{2199}=(10^{0.47712})^{2199}=10^{1049.18688}=10^{1.18688}\times10^{1048}$ である．

ここで

$$15 = \frac{3\times10}{2}=\frac{10^{0.47712}\times10^{1}}{10^{0.30103}}=10^{1.17609}$$

$$16 = 2^4=(10^{0.30103})^4=10^{1.20412}$$

より

$15<10^{1.18688}<16$ なので $15\times10^{1048}<3^{2199}<16\times10^{1048}$ を得る．

よって求める数は 5．

第７講　３次の極値などについて

> a，b を実数の定数として $f(x)=x^3+ax^2+bx$ を考える．
> $f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値を $x=\beta$ で極小値をとるとする．
> 極値が 0 となる条件を求めよ．

【答】　$a\neq 0$ かつ $\left(b=0 \text{ または } b=\dfrac{1}{4}a^2\right)$

【解答】　$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ が異なる 2 つの実数解をもつので，$a^2-3b>0$ …①　であり，$f'(x)=0$ の 2 解が α，β なので $\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{3}b$ であり，$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

となるので，$\alpha<\beta$ である．

　また $f(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\dfrac{2}{9}(3b-a^2)x-\dfrac{1}{9}ab$ より

$f(\alpha)=\dfrac{2}{9}(3b-a^2)\alpha-\dfrac{1}{9}ab$，$f(\beta)=\dfrac{2}{9}(3b-a^2)\beta-\dfrac{1}{9}ab$ である．

　よって

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= \frac{4}{81}(3b-a^2)^2\alpha\beta+\frac{2}{9}(3b-a^2)\left(-\frac{1}{9}ab\right)(\alpha+\beta)+\left(-\frac{1}{9}ab\right)^2 \\ &= \frac{4}{81}(3b-a^2)^2\cdot\frac{1}{3}b+\frac{2}{9}(3b-a^2)\left(-\frac{1}{9}ab\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)+\left(-\frac{1}{9}ab\right)^2 \\ &= \frac{b^2(4b-a^2)}{27} \end{aligned}$$

となるので，$f(\alpha)f(\beta)=0$ となる条件は $b=0$ または $b=\dfrac{1}{4}a^2$．

　これと①より $a\neq 0$ かつ $\left(b=0 \text{ または } b=\dfrac{1}{4}a^2\right)$．

第８講　接線の本数と実数解の個数

$f(x)=x^4-14x^3+61x^2-78x-6$ として $C:y=f(x)$ を考える．点 $\mathrm{A}(7,\ 0)$ から C へ引いた接線の数を求めよ．

【答】 3

【解答】 $f'(x)=4x^3-42x^2+122x-78$ より $(t,\ t^4-14t^3+61t^2-78t-6)$ における接線は

$$y = (4t^3-42t^2+122t-78)(x-t)+t^4-14t^3+61t^2-78t-6$$

$$\therefore\ y=(4t^3-42t^2+122t-78)x-3t^4+28t^3-61t^2-6$$

となり，これが点 $(7,\ 0)$ を通るので

$$0=(4t^3-42t^2+122t-78)\times 7-3t^4+28t^3-61t^2-6$$

$$\iff 3t^4-56t^3+355t^2-854t+552=0$$

$$\iff (t-1)(t-4)(t-6)(3t-23)=0$$

となるので，$t=1,\ 4,\ 6,\ \dfrac{23}{3}$.

ここで $t=1$ と $t=6$ のとき接線は $y=6x-42$，$t=4$ のとき接線は $y=-6x+42$ となり，

$f'(x)=4x^3-42x^2+122x-78=4(x-7)^3+42(x-7)^2+122(x-7)+90$ より

$f'\left(\dfrac{23}{3}\right)>90$ となるので，$t=\dfrac{23}{3}$ のときの接線は $y=6x-42$ とも $y=-6x+42$ とも一致しない．

以上より，求める接線の数は 3.

第９講　置き換えて３次，解の個数など

k を実数として x の方程式

$$64^x-12\cdot 32^x+39\cdot 16^x-(24+k)8^x+39\cdot 4^x-12\cdot 2^x+1=0$$

の異なる実数解の個数が3となる k の値を求めよ.

【答】 32

【解答】

$$64^x-12\cdot 32^x+39\cdot 16^x-(24+k)8^x+39\cdot 4^x-12\cdot 2^x+1=0$$

$$\iff 8^x-12\cdot 4^x+39\cdot 2^x-(24+k)+39\cdot 2^{-x}-12\cdot 4^{-x}+8^{-x}=0$$

$$\iff (8^x+8^{-x})-12(4^x+4^{-x})+39(2^x+2^{-x})-(24+k)=0$$

$$\iff \{(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})\}-12\{(2^x+2^{-x})^2-2\}+39(2^x+2^{-x})-(24+k)=0$$

$$\iff (2^x+2^{-x})^3-12(2^x+2^{-x})^2+36(2^x+2^{-x})-k=0 \quad \cdots\cdots①$$

となる.

ここで $t=2^x+2^{-x}$ とおくと，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2} \geqq \sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}\,(=1)$$

より $t\geqq 2$ であり，このとき $t=2^x+2^{-x} \iff (2^x)^2-t\cdot 2^x+1=0$ より $2^x=\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$ なので，$t=\sqrt{t^2}>\sqrt{t^2-4}$ であることを考慮すると，$x=\log_2\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$ とできる．よって1つの実数 t に対して異なる実数 x の個数は

$$\begin{cases} 0 & (t<2 \text{ のとき}) \\ 1 & (t=2 \text{ のとき}) \quad \cdots\cdots② \\ 2 & (t>2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる.

このとき①は $t^3-12t^2+36t-k=0 \iff t^3-12t^2+36t=k$ となる.

$f(t)=t^3-12t^2+36t$ とおくと $f'(t)=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$ より

t	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	32	↘	0	↗

となることと，②より，①の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (k<0 \text{ のとき}) \\ 2 & (k=0,\ k>32 \text{ のとき}) \\ 3 & (k=32 \text{ のとき}) \\ 4 & (0<k<32 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる.

以上より求める k は32.

第10講　面積の公式

$f(x)=x^4-3x^3+7x^2-9x+4$，$g(x)=5(x-1)^3$ とする．
　2曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

【答】 $\dfrac{16}{15}$

【解答】 $f(x)=g(x)$ より

$$\begin{aligned} & x^4-3x^3+7x^2-9x+4=5(x-1)^3 \\ \iff & x^4-8x^3+22x^2-24x+9=0 \\ \iff & (x-1)^2(x-3)^2=0 \end{aligned}$$

なので $x=1$，3.

　また $1<x<3$ のとき $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-3)^2>0$ なので求める面積は

$$\begin{aligned} \int_1^3 (f(x)-g(x))\,dx &= \int_1^3 (x-1)^2(x-3)^2\,dx \\ &= \int_1^3 \left\{(x-1)^4-4(x-1)^3+4(x-1)^2\right\}dx \\ &= \left[\frac{1}{5}(x-1)^5-(x-1)^4+\frac{4}{3}(x-1)^3\right]_1^3 \\ &= \frac{16}{15} \end{aligned}$$

第11講　絶対値付き積分

$f(x)=x-\int_0^2|f(t)|\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

【答】 $x-1$, $x-2$

【解答】 $|f(t)|\geqq 0$ より 0 以上の定数 k を用いて $\int_0^2|f(t)|\,dt=k$ とおけるので $f(x)=x-k$ と表せる.

(Ⅰ) $0\leqq k<2$ のとき,

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2|t-k|\,dt \\ &= \int_0^k(-t+k)\,dt+\int_k^2(t-k)\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2+kt\right]_0^k+\left[\frac{1}{2}t^2-kt\right]_k^2 \\ &= k^2-2k+2 \end{aligned}$$

より $k^2-3x+2=0 \iff (k-1)(k-2)=0$ なので, これと条件より $k=1$.

(Ⅱ) $k\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2|t-k|\,dt \\ &= \int_0^2(-t+k)\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2+kt\right]_0^2 \\ &= 2k-2 \end{aligned}$$

なので, これと条件より $k=2$.

以上より $f(x)=x-1$, $x-2$.

第12講　試行錯誤の数列

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0$，$a_2=1$ を満たし，$n\geqq 2$ に対して

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_{n-[\sqrt{a_n}]}=a_n \text{ のとき}) \\ a_n & (a_{n-[\sqrt{a_n}]}\neq a_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されるものとする．ただし，$\left[\sqrt{a_n}\right]$ は $\sqrt{a_n}$ 以下の最大整数を表すこととする．

　このとき $a_n=365$ を満たす n の個数を求めよ．

【答】 20

【解答】 $a_2=1$ より $\left[\sqrt{a_2}\right]=\left[\sqrt{1}\right]=1$ であり，$a_{2-[\sqrt{a_2}]}=a_1=0$ と $a_{2-[\sqrt{a_2}]}\neq a_2$ より

$a_3=a_2=1$，$a_3=1$ より $\left[\sqrt{a_3}\right]=\left[\sqrt{1}\right]=1$ であり，$a_{3-[\sqrt{a_3}]}=a_2=1$ と $a_{3-[\sqrt{a_3}]}=a_3$ より

$a_4=a_3+1=2$，$a_4=2$ より $\left[\sqrt{a_4}\right]=\left[\sqrt{2}\right]=1$ であり，$a_{4-[\sqrt{a_4}]}=a_3=1$ と $a_{4-[\sqrt{a_4}]}\neq a_4$ より

$a_5=a_4=2$，$a_5=2$ より $\left[\sqrt{a_5}\right]=\left[\sqrt{2}\right]=1$ であり，$a_{5-[\sqrt{a_5}]}=a_4=2$ と $a_{5-[\sqrt{a_5}]}=a_5$ より

$a_6=a_5+1=3$，$a_6=3$ より $\left[\sqrt{a_6}\right]=\left[\sqrt{3}\right]=1$ であり，$a_{6-[\sqrt{a_6}]}=a_5=2$ と $a_{6-[\sqrt{a_6}]}\neq a_6$ より

$a_7=a_6=3$，$a_7=3$ より $\left[\sqrt{a_7}\right]=\left[\sqrt{3}\right]=1$ であり，$a_{7-[\sqrt{a_7}]}=a_6=3$ と $a_{7-[\sqrt{a_7}]}=a_7$ より

$a_8=a_7+1=4$，$a_8=4$ より $\left[\sqrt{a_8}\right]=\left[\sqrt{4}\right]=2$ であり，$a_{8-[\sqrt{a_8}]}=a_6=3$ と $a_{8-[\sqrt{a_8}]}\neq a_8$ より

$a_9=a_8=4$，$a_9=4$ より $\left[\sqrt{a_9}\right]=\left[\sqrt{4}\right]=2$ であり，$a_{9-[\sqrt{a_9}]}=a_7=3$ と $a_{9-[\sqrt{a_9}]}\neq a_9$ より

$a_{10}=a_9=4$，$a_{10}=4$ より $\left[\sqrt{a_{10}}\right]=\left[\sqrt{4}\right]=2$ であり，$a_{10-[\sqrt{a_{10}}]}=a_8=4$ と $a_{10-[\sqrt{a_{10}}]}=a_{10}$ より $a_{11}=a_{10}+1=5$，…

　以上より，「正の整数 l に対して $a_n=k$ $(k=l^2,\ l^2+1,\ \cdots,\ l^2+2l)$ となる n の個数は $l+1$ である (…①)」と予想できる．

　$l=1$ のとき，$k=1,\ 2,\ 3$ であるが，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=1$，$a_4=2$，$a_5=2$，$a_6=3$，$a_7=3$，$a_8=4$，…より，$a_n=k$ となる n は $2(=l+1)$ 個となるので，①は成り立つ．

　ここで，$l=m$ $(\geqq 1)$ のとき，$a_n=k$ $(k=m^2,\ m^2+1,\ \cdots,\ m^2+2m)$ となる n の個数は $m+1$ である，と仮定する．

　このとき，$1+2\times3+3\times5+\cdots+(m+1)\{2(m+1)-1\}=\dfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(4m+3)$ であるから $a_n=m^2+2m$ となる n は

$$\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(4m+3)-m\leqq n\leqq\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(4m+3) \text{ となる．}$$

　$n=\dfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(4m+3)$ のとき，

　$a_n=m^2+2m$ で $m^2\leqq m^2+2m<(m+1)^2$ より，$\left[\sqrt{a_n}\right]=m$ であり，

$a_{n-[\sqrt{a_n}]}=a_{n-m}=m^2+2m$ なので $a_{n-[\sqrt{a_n}]}=a_n$ より $a_{n+1}=a_n+1=m^2+2m+1=(m+1)^2$ となる．

　ここで，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m+1$ に対して

　$a_{n+j}=(m+1)^2$ より $\left[\sqrt{a_{n+j}}\right]=m+1$ であり，$a_{n+j-[\sqrt{a_{n+j}}]}=a_{n-m+j-1}$ と

$n-m\leqq n-m+j-1\leqq n$ より $a_{n-m+j-1}=m^2+2m$ なので $a_{n+j-[\sqrt{a_{n+j}}]}\neq a_{n+j}$ より

$a_{n+j+1}=a_{n+j}=(m+1)^2$ となる．

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m+3$ に対して，$n=\dfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(4m+3)+(m+2)i$ のとき

$a_n=m^2+2m+i$ で $\left[\sqrt{a_n}\right]=m+1$ より，$a_{n-[\sqrt{a_n}]}=a_{n-m-1}=a_n$ なので

$a_{n+1}=a_n+1=(m+1)^2+i$ となり，

$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m+1$ に対して

$a_{n+j}=(m+1)^2+i$ より $\left[\sqrt{a_{n+j}}\right]=m+1$ であり，$a_{n+j-[\sqrt{a_{n+j}}]}=a_{n-m+j-1}=m^2+2m+i$

なので $a_{n+j-[\sqrt{a_{n+j}}]}\neq a_{n+j}$ より $a_{n+j+1}=a_{n+j}=(m+1)^2+i$ となることと，

$a_{n+m+2}=(m+1)^2+i$ より $\left[\sqrt{a_{n+m+2}}\right]=m+1$ であり，

$a_{n+m+2-[\sqrt{a_{n+m+2}}]}=a_{n+1}=(m+1)^2+i$ なので $a_{n+m+2-[\sqrt{a_{n+m+2}}]}=a_{n+m+2}$ より

$a_{n+m+3}=a_{n+m+2}+1=(m+1)^2+i+1$ となる．

よって $l=m+1$ のときにも $a_n=k(k=(l+1)^2,\ (l+1)^2+1,\ \cdots,\ (l+1)^2+2(l+1))$ となる n の個数は $(m+1)+1$ である．

以上より，数学的帰納法を用いて①が示された．

ここで $365=19^2+4$ なので $a_n=365$ を満たす n の個数は $19+1=20$.

第13講　応用漸化式

次の空欄にあてはまる最も適した数値を答えよ．

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=8$，$a_2=14$ を満たし

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=4n+4 \quad \cdots①$$

によって定義されているとする．

ここで①は

$a_{n+2}-2a_{n+1}+$ あ $(n+1)+$ い $=$ う $(a_{n+1}-2a_n+$ あ $n+$ い $)$ と変形できることより $a_{n+1}-2a_n=$ う $^n-$ あ $n-$ い　…②を得る．

また①は

$a_{n+2}-3a_{n+1}+$ え $(n+1)+$ お $=$ か $(a_{n+1}-3a_n+$ え $n+$ お $)$ と変形できることより $a_{n+1}-3a_n=$ か $^n-$ え $n-$ お　…③を得る．

②と③より $a_n=$ き $^n-$ く $^n+$ け $n+$ こ となる．

【答】 あ $=2$，い $=3$，う $=3$，え $=4$，お $=8$，か $=2$，き $=3$，く $=2$，け $=2$，こ $=5$

【解答】 ①は $a_{n+2}-2a_{n+1}+2(n+1)+3=3(a_{n+1}-2a_n+2n+3)$ と変形できることより $a_{n+1}-2a_n+2n+3=(a_2-2a_1+2\times1+3)3^{n-1}$ つまり $a_{n+1}-2a_n=3^n-2n-3$ …② を得る．

…あ い う

また①は $a_{n+2}-3a_{n+1}+4(n+1)+8=2(a_{n+1}-3a_n+4n+8)$ と変形できることより $a_{n+1}-3a_n+4n+8=(a_2-3a_1+4\times1+8)2^{n-1}$ つまり $a_{n+1}-3a_n=2^n-4n-8$ …③ を得る．

…え お か

②−③より $a_n=3^n-2^n+2n+5$ となる．…き く け こ

第 14 講　漸化式の応用

関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は

$$f_1(x)=2x,\quad f_{n+1}(x)=x\int_0^2 tf'_n(t)\,dt+2\int_0^1 f_n(t)\,dt\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定められている．関数 $f_n(x)$ を求めよ．

【答】 $2^n x+(n-1)2^{n-1}$

【解答】 $f_1(x)=2\cdot x+0$ と $f_{n+1}(x)=x\int_0^2 tf'_n(t)\,dt+2\int_0^1 f_n(t)\,dt$ より帰納的に

$f_n(x)=a_n x+b_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくことができる．

このとき $a_1=2$，$b_1=0$ であり，$f'_n(x)=a_n$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_0^2 tf'_n(t)\,dt \\ &= \int_0^2 a_n t\,dt \\ &= \left[\frac{a_n}{2}t^2\right]_0^2 \\ &= 2a_n \end{aligned}$$

であることと $a_1=2$ より $a_n=2\cdot 2^{n-1}$ つまり $a_n=2^n$ を得る．

また

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2\int_0^1 f_n(t)\,dt \\ &= 2\int_0^1 (a_n t+b_n)\,dt \\ &= 2\left[\frac{a_n}{2}t^2+b_n t\right]_0^1 \\ &= a_n+2b_n \\ &= 2b_n+2^n \end{aligned}$$

となり，これは $b_{n+1}-(n+1)2^n=2(b_n-n\cdot 2^{n-1})$ と変形できるので

$b_n-n\cdot 2^{n-1}=(b_1-1\cdot 2^0)2^{n-1}$ つまり $b_n=(n-1)2^{n-1}$ を得る．

以上より $f_n(x)=2^n x+(n-1)2^{n-1}$.

第15講　漸化式と一般項の予想

次の漸化式により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を予想せよ．

(1)　$a_1=7$，$a_{n+1}=2a_n+3^n-n$

(2)　$a_1=2$，$a_2=9$，$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=2^n$

【答】 (1)　2^n+3^n+n+1　　(2)　$4^n-3^n+2^{n-1}$

【解答】 (1)　a_n の係数が 2 であることと 3^n-n より，定数 A，B，C，D を用いて $a_n=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n+Cn+D$ と予想できる．

与えられた漸化式と $a_1=7$ より，$a_2=2a_1+3^1-1=16$，$a_3=2a_2+3^2-2=39$，$a_4=2a_3+3^3-3=102$ なので $2A+3B+C+D=7$，$4A+9B+2C+D=16$，$8A+27B+3C+D=39$，$16A+81B+4C+D=102$ となるものを考えて $A=B=C=D=1$．

以上より $a_n=2^n+3^n+n+1$．

(2)　$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=2^n$ の左辺をみて $x^2-7x+12=0 \iff (x-3)(x-4)=0$ つまり $x=3$，4 であることと，$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=2^n$ の右辺をみることで，定数 A，B，C を用いて

$$a_n=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n+C\cdot 4^n$$

であると予想できる．

ここで，$a_1=2$，$a_2=9$ であり，$a_{n+2}=7a_{n+1}-12a_n+2^n$ より $a_3=41$ となることより

$$2A+3B+4C=2,\quad 4A+9B+16C=9,\quad 8A+27B+64C=41$$

となるものを考えて $A=\dfrac{1}{2}$，$B=-1$，$C=1$．

よって $a_n=4^n-3^n+2^{n-1}$．

第16講　数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1a_{n+1}+2a_2a_n+\cdots+2^{n-1}a_na_2+2^na_{n+1}a_1=\frac{3^n}{n!},\quad a_1=1$$

で定められている．

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【答】 $\dfrac{1}{(n-1)!}$

【解答】 $a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$ $(n\geqq 1)$ と予想する．

$n=1$ のとき，$\dfrac{1}{(n-1)!}=\dfrac{1}{0!}=1$，$a_1=1$ より，予想は成り立つ．

$n=k$ $(\geqq 1)$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{0!}$，$a_2=\dfrac{1}{1!}$，…，$a_k=\dfrac{1}{(k-1)!}$ と仮定するとき

$$a_1a_{k+1}+2a_2a_k+\cdots+2^{k-1}a_ka_2+2^ka_{k+1}a_1=\frac{3^k}{k!}$$

$$\iff (1+2^k)a_1a_{k+1}=\frac{3^k}{k!}-(2a_2a_k+\cdots+2^{k-1}a_ka_2)\quad\cdots①$$

である．

ここで，2 以上 k 以下の整数 l に対し

$$\begin{aligned}2^{l-1}a_la_{k-l+2} &= 2^{l-1}\cdot\frac{1}{(l-1)!}\cdot\frac{1}{(k-l+1)!}\\ &= \frac{2^{l-1}}{k!}\cdot\frac{k!}{(l-1)!(k-l+1)!}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot 2^{l-1}{}_k\mathrm{C}_{l-1}\end{aligned}$$

であり $3^k=(1+2)^k=\displaystyle\sum_{l=0}^{k}2^l{}_k\mathrm{C}_l=1+2^k+(2^1{}_k\mathrm{C}_1+\cdots+2^{k-1}{}_k\mathrm{C}_{k-1})$ より

$$\begin{aligned}① \iff (1+2^k)a_{k+1} &= \frac{3^k}{k!}-\frac{3^k-(1+2^k)}{k!}\\ &= \frac{1+2^k}{k!}\end{aligned}$$

となるので $a_{k+1}=\dfrac{1}{k!}$ より $n=k+1$ のときにも予想は成り立つ．

以上より任意の自然数 n に対して $a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$ が示された．

第 17 講　和について

次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)(k+2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot 2^k}{(k+1)(k+2)}$

【答】 (1) $\dfrac{1}{5}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$　　(2) $\dfrac{2^{n+1}-n-2}{n+2}$

【解答】 (1) $(k-1)k(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{1}{5}\{(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)\}$ より

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)(k+2)\\
=\ &\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5}\{(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)\}\\
=\ &\frac{1}{5}\{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)-(-1)\cdot 0\cdot 1\cdot 2\cdot 3\}\\
=\ &\frac{1}{5}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{k\cdot 2^k}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{2^{k+1}}{k+2}-\dfrac{2^k}{k+1}$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot 2^k}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{k+2}-\frac{2^k}{k+1}\right)\\
&= \frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^1}{1+1}\\
&= \frac{2^{n+1}-n-2}{n+2}
\end{aligned}$$

第18講　確率と数列

赤玉3球，白玉3球が入った袋がある．この袋から玉を同時に2球取り出し，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す．n 回の試行の後，袋に赤玉が3球残っている確率を p_n，2球残っている確率を q_n，1球残っている確率を r_n とする．

このとき，p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} をそれぞれ p_n，q_n，r_n を用いて表せ．

【答】
$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{5}p_n \\ q_{n+1}=\dfrac{3}{5}p_n+\dfrac{3}{10}q_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5}q_n+\dfrac{1}{2}r_n \end{cases}$$

【解答】 赤玉3球，白玉3球が入った袋から2球取り出すのは ${}_6C_2$ 通りなので，そこから赤2球，赤1球と白1球，白2球とりだす確率は順に

$$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5},\quad \frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{5},\quad \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$$

となる．

赤玉2球，白玉3球が入った袋から2球取り出すのは ${}_5C_2$ 通りなので，そこから赤2球，赤1球と白1球，白2球とりだす確率は順に

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10},\quad \frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5},\quad \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

となる．

赤玉1球，白玉3球が入った袋から2球取り出すのは ${}_4C_2$ 通りなので，そこから赤2球，赤1球と白1球，白2球とりだす確率は順に

$$0,\quad \frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{2},\quad \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$$

となる．

以上より，

$$\begin{cases} p_{n+1}=p_n\times\dfrac{1}{5} \\ q_{n+1}=p_n\times\dfrac{3}{5}+q_n\times\dfrac{3}{10} \\ r_{n+1}=p_n\times\dfrac{1}{5}+q_n\times\dfrac{3}{5}+r_n\times\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

よって
$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{5}p_n \\ q_{n+1}=\dfrac{3}{5}p_n+\dfrac{3}{10}q_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5}q_n+\dfrac{1}{2}r_n \end{cases}$$

第 19 講　数学的帰納法

n を正の整数とする．任意の n について

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{4n+3}{2\sqrt{n+1}}-\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots①$$

が成立することを以下に示す．空欄に適切な数値または数式を入れよ．

《証明》

$n=1$ のとき,(①の左辺)－(①の右辺)$=\dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}-\sqrt{\boxed{イ}}}{4}>0$ より①は成り立つ.

$n=k\ (\geqq 1)$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\dfrac{4k+3}{2\sqrt{k+1}}-\dfrac{3}{2}$ を仮定する.

このとき

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\left(\frac{4(k+1)+3}{2\sqrt{(k+1)+1}}-\frac{3}{2}\right)$$

$$>\ \left(\boxed{ウ}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\left(\frac{4(k+1)+3}{2\sqrt{(k+1)+1}}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\ \frac{\sqrt{16k^3+\boxed{エ}k^2+\boxed{オ}k+50}-\sqrt{16k^3+\boxed{エ}k^2+\boxed{オ}k+49}}{2\sqrt{(k+1)(k+2)}}$$

$$>\ 0$$

となるので，$n=k+1$ のときにも①が成り立つ.

よって数学的帰納法より，任意の n に対して①が成り立つ.

【答】 $\boxed{ア}=100$, $\boxed{イ}=98$, $\boxed{ウ}=\dfrac{4k+3}{2\sqrt{k+1}}-\dfrac{3}{2}$, $\boxed{エ}=72$, $\boxed{オ}=105$

【解答】 $n=1$ のとき，(①の左辺)$=\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1$, (①の右辺)$=\dfrac{7}{2\sqrt{2}}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}-6}{4}$ となり，

$1-\dfrac{7\sqrt{2}-6}{4}=\dfrac{10-7\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{98}}{4}>0$ より①は成り立つ.

$n=k\ (\geqq 1)$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\dfrac{4k+3}{2\sqrt{k+1}}-\dfrac{3}{2}$ を仮定する.

このとき
$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\left(\frac{4(k+1)+3}{2\sqrt{(k+1)+1}}-\frac{3}{2}\right)$$

$$>\ \left(\frac{4k+3}{2\sqrt{k+1}}-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\left(\frac{4(k+1)+3}{2\sqrt{(k+1)+1}}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\ \frac{4k+5}{2\sqrt{k+1}}-\frac{4k+7}{2\sqrt{k+2}}$$

$$=\ \frac{(4k+5)\sqrt{k+2}-(4k+7)\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}}$$

$$=\ \frac{\sqrt{16k^3+72k^2+105k+50}-\sqrt{16k^3+72k^2+105k+49}}{2\sqrt{(k+1)(k+2)}}$$

$$>\ 0$$

となるので，$n=k+1$ のときにも①が成り立つ．

　よって数学的帰納法より，任意の n に対して①が成り立つ．

　以上より，ア $=100$，イ $=98$，ウ $=\dfrac{4k+3}{2\sqrt{k+1}}-\dfrac{3}{2}$，エ $=72$，

オ $=105$

第 20 講　ベクトルでの計算

A，B，P を同一平面上の点とし，A≠B とする．
以下の不等式で表される領域の面積を AB$=r$ を用いて表せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\geqq\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \quad \text{かつ} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\leqq 0$$

【答】 $\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\geqq\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\geqq 0$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\geqq 0$$

より，P は直線 AB の垂直二等分線およびそれを境界とした B を含む部分．
　また

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\leqq 0 \iff \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\leqq 0$$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$$

より，P は A を中心とする半径 AB の円の周および内部．

　以上より，求める面積は，半径 AB の円の面積を 3 等分したものから頂角が $\dfrac{2}{3}\pi$ で頂角をはさむ 2 辺の長さが AB である二等辺三角形の面積を除いたものなので，

$$\mathrm{AB}^2\pi\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{AB}^2\sin\frac{2}{3}\pi=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$$

第21講　球の取り扱い

A(0, −4, 4), $S : x^2+y^2+(z-2)^2=4$ とする．球面 S は光を通さないとして，点光源 A から光を放ったとき，xy 平面に現れる球面 S の影の境界の軌跡を求めよ．

【答】 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$

【解答】 求める軌跡上の点を Q(X, Y, 0) とする．S の中心を C(0, 0, 2) とし，線分 AQ と S の接点を T とする．

このとき CT＝2, AC＝$2\sqrt{5}$ より AT＝4 となるので，$\cos\angle\mathrm{CAT}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\angle\mathrm{CAT}$$

$$\iff (X,\ Y+4,\ -4)\cdot(0,\ 4,\ -2)=\sqrt{X^2+(Y+4)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\iff 4(Y+4)+8=\sqrt{X^2+(Y+4)^2+16}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\iff Y+6=\sqrt{X^2+(Y+4)^2+16}$$

$$\iff (Y+6)^2=X^2+(Y+4)^2+16 \text{ かつ } Y+6\geqq 0$$

$$\iff Y=\frac{1}{4}X^2-1 \text{ かつ } Y\geqq -6$$

$Y=\dfrac{1}{4}X^2-1$ のとき $Y\geqq -1$ なので $Y\geqq -6$ を満たしている．

以上より，求める軌跡は $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$.

第 22 講　三角形の五心とベクトル

三角形 ABC は AB＝2，BC＝3，CA＝4 を満たしている．
　角 B の外角の二等分線と角 C の外角の二等分線の交点を K とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

【答】 $\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

【解答】 K は角 B の外角の二等分線上にあるので，実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AK}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}+6\alpha\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}+6\alpha\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{3}\right)\\ &= (1+\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

と表せ，また K は角 C の外角の二等分線上にあるので，実数 β を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AK}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}}+12\beta\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}}+12\beta\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{3}\right)\\ &= 4\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

と表せる．

　以上より，$\begin{cases}1+\alpha=4\beta\\ 2\alpha=1-\beta\end{cases}$ なので $\alpha=\beta=\dfrac{1}{3}$．よって $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

第23講　ベクトルの利用法

2つの球を $S_1:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$，$S_2:(x-3)^2+(y+2)^2+(z-7)^2=16$ とする．

S_1 上の点をP，S_2 上の点をQとして，線分PQの長さが最小となるときの点Pと点Qの座標を求めよ．

【答】 $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{13}{3}\right)$

【解答】 S_1 と S_2 の中心を順にC，Dとすると C(1，2，3)，D(3，−2，7) であり CD=6 である．

よって2つの球の半径は1と4なので，2つの球は共有点をもたない．

ゆえに点Pと点Qを線分CD上にとれば線分PQの長さが最小となる．

S_1 の半径は1で CD=6 よりPはCDを1：5に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OC}}+1\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{1+5}=\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{11}{3}\right)$$

S_2 の半径は4で CD=6 よりQはCDを2：4=1：2に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+1\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{1+2}=\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{13}{3}\right)$$

以上より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{13}{3}\right)$．

第 24 講　空間での垂線の足

A(1, 1, 2), B(2, 2, 2), C(1, 2, 4), D(2, −2, 0) とする．
四面体 ABCD の体積を求めよ．

【答】 1

【解答】 $\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{AD}=(1,\ -3,\ -2)$ である．

$\vec{n}=(2,\ -2,\ 1)$ とおくと $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であることと $\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\neq 0$ より $\vec{n}$ は三角形 ABC を含む平面に垂直である．

D から三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線の足を H とすると

$$\overrightarrow{DH}=k\vec{n} \iff \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+k\vec{n}\ \ (k\text{ は実数})$$

と表せ，H は三角形 ABC を含む平面上なので $\overrightarrow{AH}\perp\vec{n}$ つまり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} &= \left(\overrightarrow{AD}+k\vec{n}\right)\cdot\vec{n}\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}+k\left|\vec{n}\right|^2\\ &= 6+9k=0\end{aligned}$$

となるので，$k=-\dfrac{2}{3}$．

よって $\left|\overrightarrow{DH}\right|=|k|\left|\vec{n}\right|=\dfrac{2}{3}\times 3=2$ であり，

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\times 5-1^2}=\frac{3}{2}$$

なので，求める体積は $\dfrac{3}{2}\times 2\times\dfrac{1}{3}=1$．

追加練習問題

第 25 講　円と放物線の関係

R を正の定数として，C_1：$(x-2)^2+\left(y-\dfrac{11}{4}\right)^2=R$ を考える．

円 C_1 が曲線 C_2：$y=x^2$ と共有点 P をもち，点 P で共通の接線をもつとき，点 P の x 座標を求めよ．

第26講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

$C_1 : y=-2x^2+x+1$ と $l : y=x$ の共有点を A，B として，$C_2 : y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ は A と B を通り，C_2 と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ になるという．定数 a を求めよ．

第27講　軌跡・領域の求め方

xy 平面において原点をO，$l：3x+4y=5$ 上の点をPとし，点Qは，Oを端点とする半直線OP上で $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ を満たすものとする．

このとき，Qの軌跡を求めよ．

第28講　正領域，負領域

A(1, 1)，B(0, 2) とする．t を実数として，直線 $l:(1-t^2)x+2ty=1+t^2$ が端点を含まない線分 AB と共有点をもつような t を求めよ．

第 29 講　リンゴを分ける方法

x, y, z を整数，n を自然数とする．

$$|x|+|y|+|z| \leqq n$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の組数を求めよ．

第30講　勘違いと条件付き確率

寅次郎と任三郎は封筒の中に入っているくじを引くゲームをしている.

任三郎がA，B，C，Dの区別できる4つの封筒の中の1つだけにあたりくじを入れ，残り3つにははずれくじを入れた．寅次郎には開封しない限りは中が見えないようになっている.

(1)　寅次郎は封筒Aを選んだとき，任三郎が封筒Dを開封し，中にははずれくじが入っていることを寅次郎に見せた.

このとき，寅次郎は封筒Aから他の封筒に選び直すべきだろうか．次の選択肢より選べ.

(a)　封筒Aのままにすべき.

(b)　他の封筒に選び直すべき.

(2)　(1)の後，寅次郎は封筒Aから封筒Bに選び直した．この状態で任三郎が封筒Cを開封し中にははずれくじが入っていることを寅次郎に見せた.

このとき，寅次郎は封筒Bから元の封筒Aに選び直すべきだろうか．次の選択肢より選べ.

(a)　封筒Bのままにすべき.

(b)　封筒Aに選び直すべき.

第31講　四面体について

四面体ABCDが$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=a$，$\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DB}=2$を満たしている.

A，B，C，Dの4点を通る球S_1の半径をR，四面体ABCDの4つの面に接する球S_2の半径をrとするとき，rRをaで表せ.

第32講　式の値と実数解条件

θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{2-\sin\theta}{1-\cos\theta}$ が $0<\theta<2\pi$ の範囲をくまなく動くとき最小値が 1 で最大値が 2 となるという.

　このとき $\cos\theta$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.

第 33 講　相加平均と相乗平均

正の数 x_j ($j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$) について

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6} \geqq (x_1x_2\cdots x_6)^{\frac{1}{6}}$$

が成立することを示し，これを用いて $x+\dfrac{1}{x^5}$ の最小値と最小値を与える x を求めよ．

第 34 講　対称式について

実数 x, y, z が

$$x^2+y^2+2z^2=2 \text{ かつ } x+y+z=1$$

を満たしているとき，z の値の範囲を求めよ．

第 35 講　方程式と共役解

有理数係数の x の 4 次方程式

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

が $x=\sqrt{2}-i$ を解にもつとき，定数 a，b，c，d を求めよ．

ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしで用いてもよい．

第36講　1の n 乗根

$x^3=1$ の虚数解の1つを α，$x^5=1$ の虚数解の1つを β とするとき，

$$\alpha^n(\beta^{4n}+\beta^{3n}+\beta^{2n}+\beta^n+1)$$

が正の実数となる最小の自然数 n を求めよ．

第 37 講　3 次方程式の解の公式について

x の 3 次方程式

$$x^3-9x+12=0$$

を解け.

第 38 講　整数問題 Part I

a，b，c は自然数で，a は 3 以上の素数として

$$a^2+b^2=c^2$$

を満たしているとする．

　このとき c と b の差が 1 となるような b と c が存在することを示し，b を a の式で表せ．

第 39 講　整数問題 Part II

x と y は正の整数で

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}<\frac{1}{3}$$

を満たしているものとする.

このとき, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ の最大値を求めよ.

第 40 講　複数の変数の取り扱い

x，y，z は実数で

$$1 \leqq x+y \leqq 2,\quad 0 \leqq y+z \leqq 3,\quad 0 \leqq z \leqq 2$$

を満たしているとする．このとき $f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx$ の最小値を求めよ．

第 41 講　なす角の攻め方

t と u を実数として O$(0,\ 0)$，P$(t,\ t^2+1)$，Q$(6u^2+6u+3,\ 2u+1)$ とするとき，$\angle$POQ の最小値を求めよ．

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ は，$f(x)$ が偶関数で $g(x)$ が奇関数である．

　このとき，

$$f(f(x)),\ f(g(x)),\ g(f(x)),\ g(g(x))$$

の中で偶関数はいくつあるか答えよ．

第43講　必要条件からヒントを得る

n を1以上の整数とする.
　すべての n に対して $12n^3+108n^2+336n+360$ を割り切る最大整数を求めよ.

第 44 講　二項係数

n を自然数とする．

$$ {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} $$

を簡単にせよ．

第 45 講　コーシー・シュワルツの不等式

$x+2y+3z=1$ を満たす正の実数 x，y，z に対して

$$\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}$$

の最大値を求めよ．

第 46 講　対称性

異なる 3 つの実数 α，β，γ が

$$2\alpha^3-3\alpha^2=2\beta^3-3\beta^2=2\gamma^3-3\gamma^2 \text{ かつ } \alpha<\beta<\gamma$$

を満たしているとき $\beta-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ の取り得る値の範囲を求めよ．

第 47 講　x の整式を求める

x の整式 $f(x)$ がすべての x に対して

$$f(x+2)-f(x)=x(x+1)$$

を満たしている．$f(0)=0$ のとき $f(x)$ を求めよ．

第 48 講　身の回りの数学

北海道にある利尻空港から，実験用飛行機を以下の条件で飛ばした.

(A)　離陸後は高度を一定に保ち，24 時間ちょうどで地球を 1 周する.

(B)　あらかじめ設定された高度に達してから，地球を 1 周したときの軌道は円となり (この軌道を「周回軌道」とよぶことにする)，その円の中心は地球の中心と一致している.

(C)　周回軌道に入ったのは，北緯 45 度東経 141 度で，その瞬間に飛行機は真西に向って進んでいる.

(D)　飛行機はどんな苛酷な条件のもとでも一定の高度と速度を保つことができる.

地球を完全な球とみなすこととして，周回軌道に入ったときに利尻空港ではちょうど正午であり，周回軌道の半径は地球の半径と同じとみなせることとして，以下の各問いに答えよ.

(1)　周回軌道に入ってからはじめて赤道を通過するときの利尻空港での時刻を求めよ.

(2)　周回軌道に入ってからはじめて東経 96 度線を通過するときの利尻空港での時刻として最も ふさわしいものを以下の 5 つから選べ.

①　14 時 00 分　②　14 時 20 分　③　14 時 40 分　④　15 時 00 分　⑤　15 時 20 分

ただし，必要があれば $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{5}=2.236$, $\sqrt{6}=2.449$, $\sqrt{7}=2.646$ であること，また以下の三角関数表(角の単位は度数法)を利用してもよい.

度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦
1	0.018	6	0.105	11	0.191	16	0.276	21	0.358	26	0.438	31	0.515	36	0.588	41	0.656
2	0.035	7	0.122	12	0.208	17	0.292	22	0.375	27	0.454	32	0.530	37	0.602	42	0.669
3	0.052	8	0.139	13	0.225	18	0.309	23	0.391	28	0.469	33	0.545	38	0.616	43	0.682
4	0.070	9	0.156	14	0.242	19	0.326	24	0.407	29	0.485	34	0.559	39	0.629	44	0.695
5	0.087	10	0.174	15	0.259	20	0.342	25	0.423	30	0.500	35	0.574	40	0.643	45	0.707

追加練習問題解答

第 25 講　円と放物線の関係

R を正の定数として，$C_1 : (x-2)^2+\left(y-\dfrac{11}{4}\right)^2=R$ を考える．

円 C_1 が曲線 $C_2 : y=x^2$ と共有点 P をもち，点 P で共通の接線をもつとき，点 P の x 座標を求めよ．

【答】 $-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$

【解答】 C_1 の中心を C とすると，P での C_1 の接線は CP に垂直なので，点 P における C_2 の法線が C を通る場合を考えればよい．

P$(t,\ t^2)$ とすると，$C_2 : y=x^2$ より $y'=2x$ なので，P における法線は

$$1\cdot(x-t)+2t\cdot(y-t^2)=0 \iff x+2ty-t-2t^3=0$$

となり，これが点 C$\left(2,\ \dfrac{11}{4}\right)$ を通るので

$$2+2t\cdot\frac{11}{4}-t-2t^3=0 \iff (2t+1)(2t^2-t-4)=0$$

となる．よって求める x 座標は $-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$．

第26講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

$C_1：y=-2x^2+x+1$ と $l：y=x$ の共有点を A，B として，$C_2：y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ は A と B を通り，C_2 と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ になるという．定数 a を求めよ．

【答】 1

【解答】 $C_1：-y-2x^2+x+1=0$，$l：-y+x=0$ より

$$(-y-2x^2+x+1)+k(-y+x)=0$$

は C_1 と l の2つの交点 A と B を通る．

$$(-y-2x^2+x+1)+k(-y+x)=0 \iff (k+1)y=-2x^2+(k+1)x+1$$

であるが，この式が C_2 を表わすとすると，$k+1=0$ としたときこの式は放物線を表していないので $k+1\neq 0$．よって $y=-\dfrac{2}{k+1}x^2+x+\dfrac{1}{k+1}$．つまり $a=-\dfrac{2}{k+1}$，$b=1$，$c=\dfrac{1}{k+1}$ より $y=ax^2+x-\dfrac{a}{2}$ となる．

$y=0$ とすると $ax^2+x-\dfrac{a}{2}=0$ より $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{2a^2+1}}{2a}$ なので，これを小さい順に α，β とすると x 軸とで囲まれる面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\left(-ax^2-x+\frac{a}{2}\right)dx &= \int_\alpha^\beta(-a)(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= -\frac{-a}{6}(\beta-\alpha)^3\\ &= \frac{(2a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{6a^2}\end{aligned}$$

となる．

これが $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので

$$\begin{aligned}\frac{(2a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{6a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff 8a^6-15a^4+6a^2+1=0\\ &\iff (a-1)^2(a+1)^2(8a^2+1)=0\end{aligned}$$

となり，$a>0$ より $a=1$．

第 27 講　軌跡・領域の求め方

xy 平面において原点を O，$l : 3x+4y=5$ 上の点を P とし，点 Q は，O を端点とする半直線 OP 上で OP・OQ＝1 を満たすものとする．

このとき，Q の軌跡を求めよ．

【答】 $\left(x-\dfrac{3}{10}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ かつ $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

【解答】 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおく．OP・OQ＝1 より OQ≠0 だから $X^2+Y^2\neq0$ である．

点 P は l 上より $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$（ただし $3\alpha+4\beta=5$）と表せる．

点 Q は O を端点とする半直線 OP 上にあるので，

$$
\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\\
\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&= \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}
\end{aligned}
$$

なので $(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{X}{X^2+Y^2},\ \dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)$ と表せる．これを $3\alpha+4\beta=5$ に代入して

$$
\begin{aligned}
3\times\frac{X}{X^2+Y^2}+4\times\frac{Y}{X^2+Y^2}=5 &\iff \frac{3}{5}X+\frac{4}{5}Y=X^2+Y^2\\
&\iff \left(X-\frac{3}{10}\right)^2+\left(Y-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

以上より，Q の軌跡は

$$\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{4} \text{ かつ } (x,\ y)\neq(0,\ 0)$$

第 28 講　正領域，負領域

A(1，1)，B(0，2) とする．t を実数として，直線 l：$(1-t^2)x+2ty=1+t^2$ が端点を含まない線分 AB と共有点をもつような t を求めよ．

【答】 $0<t<2-\sqrt{3}$，$1<t<2+\sqrt{3}$

【解答】 $f(x,\ y)=(1-t^2)x+2ty-(1+t^2)$ とおく．

$f(1,\ 1)$ と $f(0,\ 2)$ が異符号であればよいので

$$\begin{aligned} f(1,\ 1)\times f(0,\ 2) &= (-2t^2+2t)(-t^2+4t-1) \\ &= 2t(t-1)\{t-(2-\sqrt{3})\}\{t-(2+\sqrt{3})\}<0 \end{aligned}$$

より $0<t<2-\sqrt{3}$，$1<t<2+\sqrt{3}$．

第 29 講　リンゴを分ける方法

x, y, z を整数, n を自然数とする.

$$|x|+|y|+|z|\leqq n$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の組数を求めよ.

【答】 $\dfrac{(2n+1)(2n^2+2n+3)}{3}$

【解答】（Ⅰ） $x\geqq 1$, $y\geqq 1$, $z\geqq 1$ のとき

$|x|+|y|+|z|\leqq n \iff x+y+z\leqq n \iff (x-1)+(y-1)+(z-1)\leqq n-3$ を満たすものは, $n-3$ 個のリンゴを横 1 列に並べ 4 人に 0 個以上配布する場合を考えて, 並べた $n-3$ 個のリンゴと 3ヶ所仕切りの場所を選べばよいので ${}_n\mathrm{C}_3$ 通り.

$x\geqq 1$, $y\geqq 1$, $z\leqq -1$ のとき, $x\geqq 1$, $y\leqq -1$, $z\geqq 1$ のとき,

$x\leqq -1$, $y\geqq 1$, $z\geqq 1$ のとき, $x\geqq 1$, $y\leqq -1$, $z\leqq -1$ のとき,

$x\leqq -1$, $y\geqq 1$, $z\leqq -1$ のとき, $x\leqq -1$, $y\leqq -1$, $z\geqq 1$ のとき,

$x\leqq -1$, $y\leqq -1$, $z\leqq -1$ のときも同様であるから $8\times{}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{4}{3}n(n-1)(n-2)$ 通り.

（Ⅱ） $z=0$ のとき, $|x|+|y|+|z|\leqq n$ は $|x|+|y|\leqq n$ となるが, $x\geqq 1$, $y\geqq 1$ のとき

$|x|+|y|\leqq n \iff (x-1)+(y-1)\leqq n-2$ を満たすものを考えると,（Ⅰ）と同様で仕切りが 2 つになる場合なので ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り.

$x\geqq 1$, $y\leqq -1$ のとき, $x\leqq -1$, $y\geqq 1$ のとき, $x\leqq -1$, $y\leqq -1$ のときも同様なので

$4\times{}_n\mathrm{C}_2=2n(n-1)$ 通り.

$y=0$ のとき, $x=0$ のときも同様に $2n(n-1)$ 通りとなる.

（Ⅲ） $y=z=0$ のとき, $|x|+|y|+|z|\leqq n$ は $|x|\leqq n$ となるが, $x\geqq 1$ または $x\leqq -1$ となるものは $2n$ 通り.

$z=x=0$ のとき, $x=y=0$ のときも同様に $2n$ 通りである.

（Ⅳ） $x=y=z=0$ のときは 1 通り.

以上より, 求める組数は

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)+3\times 2n(n-1)+3\times 2n+1 &= \frac{4n^3+6n^2+8n+3}{3}\\ &= \frac{(2n+1)(2n^2+2n+3)}{3}\end{aligned}$$

第 30 講　勘違いと条件付き確率

寅次郎と任三郎は封筒の中に入っているくじを引くゲームをしている．

　任三郎が A，B，C，D の区別できる 4 つの封筒の中の 1 つだけにあたりくじを入れ，残り 3 つにははずれくじを入れた．寅次郎には開封しない限りは中が見えないようになっている．

(1)　寅次郎は封筒 A を選んだとき，任三郎が封筒 D を開封し，中にはずれくじが入っていることを寅次郎に見せた．

　このとき，寅次郎は封筒 A から他の封筒に選び直すべきだろうか．次の選択肢より選べ．

(a)　封筒 A のままにすべき．

(b)　他の封筒に選び直すべき．

(2)　(1)の後，寅次郎は封筒 A から封筒 B に選び直した．この状態で任三郎が封筒 C を開封し中にはずれくじが入っていることを寅次郎に見せた．

　このとき，寅次郎は封筒 B から元の封筒 A に選び直すべきだろうか．次の選択肢より選べ．

(a)　封筒 B のままにすべき．

(b)　封筒 A に選び直すべき．

【答】　(1)　(b)　　(2)　(b)

【解答】　(1)　4 つの封筒にあたりが入っている確率はどれも $\frac{1}{4}$ である．

(Ⅰ)　A にあたりが入っている場合，B，C，D にはずれが入っていて，任三郎が B，C，D の中から D を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$ なので，A にあたりが入っていて任三郎が D を開封してはずれとなる確率は $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$.

(Ⅱ)　B にあたりが入っている場合，C，D にはずれが入っていて，任三郎が C，D の中から D を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$ なので，B にあたりが入っていて任三郎が D を開封してはずれとなる確率は $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

(Ⅲ)　C にあたりが入っている場合，(Ⅱ)と同様に，C にあたりが入っていて任三郎が D を開封してはずれとなる確率は $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

(Ⅳ)　D にあたりが入っている場合，任三郎が D を開封してはずれとなることはない．

　以上より，任三郎が D を開封してはずれとなるときに，A，B，C にあたりが入っている確率は順に，

$$\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{4},\quad \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{3}{8},\quad \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{3}{8}$$

となる.

よって，寅次郎は封筒 B または封筒 C に選び直した方がよいので，選択肢は(b).

(2) (1)の後なので，A，B，C にあたりが入っている確率は順に $\frac{1}{4}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{3}{8}$ となっている.

(I) A にあたりが入っている場合，B，C にはずれが入っていて，任三郎は C しか選べないので，A にあたりが入っていて任三郎が C を開封してはずれとなる確率は $\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$.

(II) B にあたりが入っている場合，A，C にはずれが入っていて，任三郎が A，C の中から C を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$ なので，B にあたりが入っていて任三郎が C を開封してはずれとなる確率は $\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$.

(III) C にあたりが入っている場合，任三郎が C を選んではずれになることはない.

以上より，任三郎が C を開封してはずれとなるときに，A，B にあたりが入っている確率は順に，

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}}=\frac{4}{7},\quad \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}}=\frac{3}{7}$$

となる.

よって，寅次郎は封筒 A を選びなおした方がよいので選択肢は(b).

第31講　四面体について

四面体ABCDが AB＝AC＝AD＝a，BC＝CD＝DB＝2を満たしている．

A，B，C，Dの4点を通る球 S_1 の半径を R，四面体ABCDの4つの面に接する球 S_2 の半径を r とするとき，rR を a で表せ．

【答】 $\dfrac{a^2}{2\left\{\sqrt{3(a^2-1)}+1\right\}}$

【解答】 正三角形BCDの重心をHとすると，AB＝AC＝AD＝a，BC＝CD＝DB＝2より AHは三角形BCDに垂直であり，Hは三角形BCDの外心でもある．

正弦定理より $2\times \mathrm{BH}=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}$ なので $\mathrm{BH}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$．よって $\mathrm{AH}=\sqrt{a^2-\dfrac{4}{3}}$ となる．

S_1 は外接球，S_2 は内接球であり，それぞれの中心を順にP，Qとすると，対称性よりこの2点は線分AH上にある．

$\sqrt{a^2-\dfrac{4}{3}}=h$ とすると，三角形PBHにおいて

$$\mathrm{PB}^2=\mathrm{PH}^2+\mathrm{BH}^2 \iff R^2=(h-R)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\iff R=\frac{a^2}{2h}$$

である．

また三角形BCDの面積は $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$ なので，四角錐ABCDの体積は

$\sqrt{3}\times h\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ であり，

また三角形BCD以外の三角形の面積は $2\times\sqrt{a^2-1}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{a^2-1}$ なので

$$\frac{h}{\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{a^2-1}\times 3\right)\times r\times\frac{1}{3} \iff r=\frac{h}{\sqrt{3(a^2-1)}+1}$$

以上より

$$\begin{aligned} rR &= \frac{h}{\sqrt{3(a^2-1)}+1}\times\frac{a^2}{2h} \\ &= \frac{a^2}{2\left\{\sqrt{3(a^2-1)}+1\right\}} \end{aligned}$$

第32講　式の値と実数解条件

θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{2-\sin\theta}{1-\cos\theta}$ が $0<\theta<2\pi$ の範囲をくまなく動くとき最小値が1で最大値が2となるという．

　このとき $\cos\theta$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

【答】　最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，最小値 -1

【解答】　$C:x^2+y^2=1$ 上の点をPとすると $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表せるので，$\mathrm{A}(1,\ 2)$ とおくことにより，$f(\theta)=\dfrac{2-\sin\theta}{1-\cos\theta}$ $(0<\theta<2\pi)$ は「直線APの傾き」とみることができる．

　$f(\theta)=1$ のとき，$\mathrm{AP}:y=x+1$ となるので，直線APと C との交点は $(0,\ 1)$ と $(-1,\ 0)$ となる．

　$f(\theta)=2$ のとき，$\mathrm{AP}:y=2x$ となるので，直線APと C との交点は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ と $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ となる．

　以上より「直線APの傾き」を1から2まで変化させたときの C との共有点の x 座標は $-1\leqq x\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となるので $\cos\theta$ の最大値は $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，最小値は -1.

第 33 講　相加平均と相乗平均

正の数 x_j ($j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$) について

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6} \geqq (x_1x_2\cdots x_6)^{\frac{1}{6}}$$

が成立することを示し，これを用いて $x+\dfrac{1}{x^5}$ の最小値と最小値を与える x を求めよ.

【答】　$x=\sqrt[6]{5}$ のとき最小値 $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{5}$

【解答】　$\alpha,\ \beta,\ x,\ y,\ z$ を正の数とする.

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2 \geqq 0$$

より $\alpha^2+\beta^2 \geqq 2\alpha\beta$（等号成立は $\alpha=\beta$ のとき）……①　が示された．また

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\cdot\frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}$$

より $x^3+y^3+z^3 \geqq 3xyz$（等号成立は $x=y=z$ のとき）……②　が示された.

①において $\alpha^2=x_1,\ \beta^2=x_2$ とおくことで $x_1+x_2 \geqq 2(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}$ を得る.

同様に $x_3+x_4 \geqq 2(x_3x_4)^{\frac{1}{2}},\ x_5+x_6 \geqq 2(x_5x_6)^{\frac{1}{2}}$ を得るので

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geqq 2\left\{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}+(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}+(x_5x_6)^{\frac{1}{2}}\right\} \quad \cdots\cdots③$$

次に，②において $(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}=x^3,\ (x_3x_4)^{\frac{1}{2}}=y^3,\ (x_5x_6)^{\frac{1}{2}}=z^3$ とおくことで

$(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}+(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}+(x_5x_6)^{\frac{1}{2}} \geqq 3\left\{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_5x_6)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}=3(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)^{\frac{1}{6}}$ を得る．この結果と③より

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geqq 6(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)^{\frac{1}{6}} \iff \frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6} \geqq (x_1x_2\cdots x_6)^{\frac{1}{6}}$$

を得る．等号成立条件は

$$x_1=x_2 \text{ かつ } x_3=x_4 \text{ かつ } x_5=x_6 \text{ かつ } (x_1x_2)^{\frac{1}{2}}=(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}=(x_5x_6)^{\frac{1}{2}}$$

つまり $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6$ のときである.

ここで，$x+\dfrac{1}{x^5}=\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x^5} \geqq 6\left(\dfrac{x}{5}\cdot\dfrac{x}{5}\cdot\dfrac{x}{5}\cdot\dfrac{x}{5}\cdot\dfrac{x}{5}\cdot\dfrac{1}{x^5}\right)^{\frac{1}{6}}=\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{5}$

であり，$\dfrac{x}{5}=\dfrac{1}{x^5}$ より $x=\sqrt[6]{5}$ なので，$x+\dfrac{1}{x^5}$ の最小値は $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{5}$，最小値を与える x は $x=\sqrt[6]{5}$ である.

第 34 講　対称式について

実数 x, y, z が

$$x^2+y^2+2z^2=2 \text{ かつ } x+y+z=1$$

を満たしているとき，z の値の範囲を求めよ．

【答】 $-\dfrac{3}{5} \leqq z \leqq 1$

【解答】 $x+y+z=1$ より $x+y=1-z$ であり，

$x^2+y^2+2z^2=2$ より $(x+y)^2-2xy=2-2z^2$ つまり

$(1-z)^2-2xy=2-2z^2 \iff xy=\dfrac{3z^2-2z-1}{2}$ である．x と y は t の 2 次方程式

$t^2-(1-z)t+\dfrac{3z^2-2z-1}{2}=0$ の 2 つの実数解となるので

$$(1-z)^2-4\times\frac{3z^2-2z-1}{2} \geqq 0 \iff -(5z+3)(z-1) \geqq 0$$

よって，求める z の値の範囲は $-\dfrac{3}{5} \leqq z \leqq 1$.

第 35 講　方程式と共役解

有理数係数の x の 4 次方程式

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

が $x=\sqrt{2}-i$ を解にもつとき，定数 a，b，c，d を求めよ．

ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしで用いてもよい．

【答】 $a=0$，$b=-2$，$c=0$，$d=9$

【解答】 $x=\sqrt{2}-i$ を解にもつので

$$(\sqrt{2}-i)^4+a(\sqrt{2}-i)^3+b(\sqrt{2}-i)^2+c(\sqrt{2}-i)+d=0$$

$$\iff (-7-4\sqrt{2}\,i)+a(-\sqrt{2}-5i)+b(1-2\sqrt{2}\,i)+c(\sqrt{2}-i)+d=0$$

$$\iff \{b+d-7+(c-a)\sqrt{2}\}+\{-5a-c-2(b+2)\sqrt{2}\}i=0$$

ここで a，b，c，d は有理数なので，$b+d-7+(c-a)\sqrt{2}$ と $-5a-c-2(b+2)\sqrt{2}$ は実数となるから

$$b+d-7+(c-a)\sqrt{2}=0 \text{ かつ } -5a-c-2(b+2)\sqrt{2}=0$$

となるが，$c-a\neq 0$，$b+2\neq 0$ とすると $\sqrt{2}=\dfrac{b+d-7}{a-c}=-\dfrac{5a+c}{2(b+2)}$ となり $\dfrac{b+d-7}{a-c}$ と $-\dfrac{5a+c}{2(b+2)}$ が有理数であるから，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾．

よって $c-a=0$ かつ $b+2=0$ で $b+d-7=0$，$-5a-c=0$ より $a=0$，$b=-2$，$c=0$，$d=9$．

第36講　1のn乗根

$x^3=1$ の虚数解の1つを α，$x^5=1$ の虚数解の1つを β とするとき，

$$\alpha^n(\beta^{4n}+\beta^{3n}+\beta^{2n}+\beta^n+1)$$

が正の実数となる最小の自然数 n を求めよ．

【答】 15

【解答】 $x^3=1 \iff (x-1)(x^2+x+1)=0$ の虚数解の1つが α より，$\alpha^3=1$，$\alpha^2+\alpha+1=0$ を満たす．

このとき，$\alpha^{n+3}-\alpha^n=\alpha^n(\alpha^3-1)=0$ より $\alpha^{n+3}=\alpha^n$ であることと，$\alpha^3=1 \iff \alpha^2=\dfrac{1}{\alpha}$，$\alpha^3=1$ より α^n が実数となるのは n が3の倍数のときだけで，そのとき $\alpha^n=\alpha^3=1$ である．

$x^5=1 \iff (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ の虚数解の1つが β より，$\beta^5=1$，$\beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1=0$ を満たす．

ここで $f(n)=\beta^{4n}+\beta^{3n}+\beta^{2n}+\beta^n+1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(n+5)-f(n) &= (\beta^{4n+20}+\beta^{3n+15}+\beta^{2n+10}+\beta^{n+5}+1)-(\beta^{4n}+\beta^{3n}+\beta^{2n}+\beta^n+1) \\ &= \left\{(\beta^5)^4-1\right\}\beta^{4n}+\left\{(\beta^5)^3-1\right\}\beta^{3n}+\left\{(\beta^5)^2-1\right\}\beta^{2n}+(\beta^5-1)\beta^n=0 \end{aligned}$$

より $f(n+5)=f(n)$ であり

$$\begin{aligned} f(1) &= \beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1=0 \\ f(2) &= \beta^8+\beta^6+\beta^4+\beta^2+1=\beta^3+\beta+\beta^4+\beta^2+1=0 \\ f(3) &= \beta^{12}+\beta^9+\beta^6+\beta^3+1=\beta^2+\beta^4+\beta+\beta^3+1=0 \\ f(4) &= \beta^{16}+\beta^{12}+\beta^8+\beta^4+1=\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+1=0 \\ f(5) &= \beta^{20}+\beta^{15}+\beta^{10}+\beta^5+1=1+1+1+1+1=5 \end{aligned}$$

なので $\beta^n=\begin{cases} 5 & (n \text{ が } 5 \text{ の倍数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が } 5 \text{ の倍数でないとき}) \end{cases}$

以上より，$\alpha^n(\beta^{4n}+\beta^{3n}+\beta^{2n}+\beta^n+1)$ が正の実数となるのは「n が3の倍数かつ n が5の倍数」つまり「n が15の倍数」のときなので，求める最小の自然数は15．

第37講　3次方程式の解の公式について

x の3次方程式

$$x^3-9x+12=0$$

を解け.

【答】 $x=-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$, $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)}{2}i$, $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)}{2}i$

【解答】 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$, $\alpha=\sqrt[3]{3}$, $\beta=\sqrt[3]{9}$ とおくと, $\alpha^3+\beta^3=3+9=12$, $3\alpha\beta=3\sqrt[3]{27}=9$ より

$$\begin{aligned} x^3-9x+12=0 &\iff x^3-3\alpha\beta x+\alpha^3+\beta^3=0 \\ &\iff (x+\alpha+\beta)(x+\omega\alpha+\omega^2\beta)(x+\omega^2\alpha+\omega\beta)=0 \\ &\therefore\ x=-\alpha-\beta,\ -\omega\alpha-\omega^2\beta,\ -\omega^2\alpha-\omega\beta \end{aligned}$$

となるので,

$$x=-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},\ \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}+\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)}{2}i,\ \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}-\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)}{2}i.$$

第 38 講　整数問題 Part Ⅰ

a，b，c は自然数で，a は 3 以上の素数として

$$a^2+b^2=c^2$$

を満たしているとする．

　このとき c と b の差が 1 となるような b と c が存在することを示し，b を a の式で表せ．

【答】 $b=\dfrac{a^2-1}{2}$

【解答】 a は 3 以上の素数なので，1 以上の整数 k を用いて $a=2k+1$ と表せる．

　このとき，$\dfrac{a^2-1}{2}=2k^2+2k$（整数）であるが，

$$\left(\frac{a^2-1}{2}+1+\frac{a^2-1}{2}\right)\left(\frac{a^2-1}{2}+1-\frac{a^2-1}{2}\right)=a^2\times 1$$

より $\left(\dfrac{a^2-1}{2}+1\right)^2-\left(\dfrac{a^2-1}{2}\right)^2=a^2$ なので $c=\dfrac{a^2-1}{2}+1$，$b=\dfrac{a^2-1}{2}$ とすることで $a^2+b^2=c^2$ かつ $c-b=1$ となる整数 b と c の存在が示された．

　このとき，$b=\dfrac{a^2-1}{2}$ である．

第 39 講　整数問題 Part II

x と y は正の整数で

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}<\frac{1}{3}$$

を満たしているものとする．

このとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ の最大値を求めよ．

【答】 $\dfrac{17}{52}$

【解答】 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}<\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{2y-3}{6y}$ であり，$\dfrac{1}{x}>0$ より $\dfrac{2y-3}{6y}>0$．これと $y>0$ より $2y-3>0$．y は整数より $y\geqq 2$ である．

また $(0<)\dfrac{1}{x}<\dfrac{2y-3}{6y}$ より $x>\dfrac{6y}{2y-3}=3+\dfrac{9}{2y-3}$　……①　である．

(Ⅰ)　$y=2$ のとき，①より $x>12$ なので $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ の最大値は $\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{52}=0.326\cdots$ である．

(Ⅱ)　$y=3$ のとき，①より $x>6$ なので $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ の最大値は $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{42}=0.309\cdots$ である．

(Ⅲ)　$4\leqq y\leqq 6$ のとき，①より $x\geqq 5$ なので $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ の最大値は $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{13}{40}=0.325$ である．

(Ⅳ)　$y\geqq 7$ のとき，①より $x\geqq 4$ なので $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ の最大値は $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{14}=\dfrac{9}{28}=0.321\cdots$ である．

以上より，$x=13$，$y=2$ のとき，求める最大値は $\dfrac{17}{52}$．

第 40 講　複数の変数の取り扱い

x, y, z は実数で

$$1 \leqq x+y \leqq 2,\ 0 \leqq y+z \leqq 3,\ 0 \leqq z \leqq 2$$

を満たしているとする．このとき $f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx$ の最小値を求めよ．

【答】　-4

【解答】　j, k を定数とする．$x=j$, $y=k$ として，まずは z の関数と考えると，

$$\begin{aligned} f(j,\ k,\ z) &= j^2+k^2+z^2-2jk-2kz-2zj \\ &= \{z-(j+k)\}^2-4jk \end{aligned}$$

となり，また

$1 \leqq j+k \leqq 2$, $0 \leqq k+z \leqq 3$, $0 \leqq z \leqq 2 \iff 1-k \leqq j \leqq 2-k$ ……①，$-k \leqq z \leqq 3-k$ ……②，$0 \leqq z \leqq 2$ ……③より，②と③を同時に満たす z が存在する条件は「$3-k<0$ または $2<-k$」を否定した $-2 \leqq k \leqq 3$ であり，このとき②かつ③は

$$\begin{cases} -k \leqq z \leqq 2 & (-2 \leqq k < 0 \text{ のとき}) \\ 0 \leqq z \leqq 2 & (0 \leqq k \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 \leqq z \leqq 3-k & (1 < k \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$ ……④となる．

(Ⅰ)　$-2 \leqq k < -1$ のときは，④より $-k \leqq z \leqq 2$ となる．

(ⅰ)　$(j+k)-(-k)=j+2k \geqq 0$ のときは，$j+k \geqq -k$ なので

$f(j,\ k,\ z)=\{z-(j+k)\}^2-4jk$ の最小値は $f(j,\ k,\ j+k)=-4jk$ となる．

このとき $j+2k \geqq 0$ より $j \geqq -2k$．これと①を同時に満たす j は，$-2 \leqq k < -1$ のとき $1-k < -2k \leqq 2-k$ であることより，$-2k \leqq j \leqq 2-k$ となる．

$f(j,\ k,\ j+k)=(-4k)j$ を j の式とみたとき，$-2 \leqq k < -1$ のとき $-4k>0$ なので，$f(j,\ k,\ j+k)$ は $j=-2k$ のとき最小値 $(-4k)(-2k)=8k^2$ をとる．

(ⅱ)　$(j+k)-(-k)=j+2k<0$ のときは，$j+k<-k$ なので

$f(j,\ k,\ z)=\{z-(j+k)\}^2-4jk$ の最小値は $f(j,\ k,\ -k)=j^2+4k^2$ となる．

このとき $j+2k<0$ より $j<-2k$．これと①を同時に満たす j は，$1-k<-2k \leqq 2-k$ であることより，$1-k \leqq j < -2k$ となる．

$f(j,\ k,\ -k)=j^2+4k^2$ を j の式とみたとき，$-2 \leqq k < -1$ のとき $1-k>0$ なので，$f(j,\ k,\ -k)$ は $j=1-k$ のとき最小値 $(1-k)^2+4k^2=5k^2-2k+1$ をとる．

$-2 \leqq k < -1$ のとき $8k^2-(5k^2-2k+1)=3k^2+2k-1=(3k-1)(k+1)>0$ より $8k^2>5k^2-2k+1$ となるので，$-2 \leqq k < -1$ のときの最小値は $5k^2-2k+1$．

(Ⅱ)　$-1 \leqq k < 0$ のときは，④より $-k \leqq z \leqq 2$ となる．また，このとき $-2k \leqq 1-k < 2-k$ なので，$j+2k<0$ つまり $j<-2k$ のとき，これと①を同時にみたす j は存在しない．

よって $(j+k)-(-k)=j+2k \geqq 0$ のときだけを考えればよく，(Ⅰ)の(ⅰ)と同様に考えると，$j \geqq -2k$ と①を同時に満たす j は①になるので，$f(j,\ k,\ j+k)=(-4k)j$ の最小値は，$-1 \leqq k < 0$ のとき $-4k>0$ なので，$j=1-k$ のときで，その値は $-4k(1-k)=4k^2-4k$ となる．

(Ⅲ)　$0 \leqq k \leqq 1$ のときは，④より $0 \leqq z \leqq 2$ となり，$1 \leqq j+k \leqq 2$ より $f(j,\ k,\ z)$ の最小値は $f(j,\ k,\ j+k)=-4jk$.

　$k=0$ のとき $-4jk$ は① $\Longleftrightarrow$ $1 \leqq j \leqq 2$ の範囲で常に 0 となり，$0<k \leqq 1$ のとき $-4k<0$ なので，①より，$f(j,\ k,\ j+k)=(-4k)j$ は $j=2-k$ のとき最小値 $(-4k)(2-k)=4k^2-8k$ をとる.

　以上より，$0 \leqq k \leqq 1$ のときの最小値は $4k^2-8k$ である.

(Ⅳ)　$1<k<2$ のときは，④より $0 \leqq z \leqq 3-k$ となる.

(i)　$(j+k)-(3-k)=j+2k-3 \geqq 0$ のときは，$j+k \geqq 3-k$ なので $f(j,\ k,\ z)=\{z-(j+k)\}^2-4jk$ の最小値は $f(j,\ k,\ 3-k)=(j-3)^2+4k^2-12k$ となる.

　このとき $j+2k-3 \geqq 0$ より $j \geqq 3-2k$. これと①を同時に満たす j は，$1<k<2$ のとき $1-k<3-2k<2-k$ であることより，$3-2k \leqq j \leqq 2-k$ となる.

　ここで $f(j,\ k,\ 3-k)=(j-3)^2+4k^2-12k$ を j の式とみたときの最小値は $3-2k \leqq j \leqq 2-k(<3)$ より

$$f(2-k,\ k,\ 3-k)=(2-k-3)^2+4k^2-12k=5k^2-10k+1.$$

(ii)　$(j+k)-(3-k)=j+2k-3<0$ のときは，$j+k<3-k$ なので $f(j,\ k,\ z)=\{z-(j+k)\}^2-4jk$ の最小値は $f(j,\ k,\ j+k)=-4jk$ となる.

　このとき $j+2k-3<0$ より $j<3-2k$. これと①を同時に満たす j は，$1-k<3-2k<2-k$ であることより，$1-k \leqq j<3-2k$ となる.

　ここで $1<k<2$ のとき $-4k<0$ なので $f(j,\ k,\ j+k)=(-4k)j$ の $1-k \leqq j<3-2k$ における最小値はない.

以上より，$1<k<2$ のときの最小値は $5k^2-10k+1$.

(Ⅴ)　$2 \leqq k \leqq 3$ のときは，④より $0 \leqq z \leqq 3-k$ となり，また $3-2k \leqq 1-k<2-k$ であるので，$j<3-2k$ のときは，これと①を同時に満たす j は存在しない．よって $j \geqq 3-2k$ のとき，つまり $(j+k)-(3-k)=j+2k-3 \geqq 0$ のときだけを考えればよい.

　このとき $3-k \leqq j+k$ なので(Ⅳ)の(i)と同様に z に関する最小値は $f(j,\ k,\ 3-k)=(j-3)^2+4k^2-12k$ となる．このとき，$j \geqq 3-2k$ と①を同時に満たす j は $1-k \leqq j \leqq 2-k(<3)$ なので，$f(j,\ k,\ 3-k)$ の最小値は $f(2-k,\ k,\ 3-k)=5k^2-10k+1$ となる.

　以上より，最小値は
$$\begin{cases} 5k^2-2k+1=5\left(k-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5} & (-2 \leqq k<-1 \text{ のとき}) \\ 4k^2-4k=4\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2-1 & (-1 \leqq k<0 \text{ のとき}) \\ 4k^2-8k=4(k-1)^2-4 & (0 \leqq k \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 5k^2-10k+1=5(k-1)^2-4 & (1<k \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$
となるから，

$k=1$（このとき $j=2-k=1$，$z=j+k=2$）より $x=y=1$，$z=2$ のとき，求める最小値は -4 となる.

第41講　なす角の攻め方

t と u を実数として O(0, 0)，P(t, t^2+1)，Q($6u^2+6u+3$, $2u+1$) とするとき，∠POQ の最小値を求めよ.

【答】 $\dfrac{\pi}{4}$

【解答】 P(t, t^2+1) は曲線 $y=x^2+1$ 上の点であり，$y'=2x$ より P における接線は

$$y=2t(x-t)+t^2+1 \qquad \therefore \quad y=2tx-t^2+1$$

となる. これが原点を通るとすると $0=2t\times 0-t^2+1$ より $t=\pm 1$.

ここで接点が第1象限であるのは $t=1$ のときで，原点から曲線 $y=x^2+1$ に引いた接線は $y=2x$ となり，このとき P(1, 2) となる.

Q($6u^2+6u+3$, $2u+1$) において，$(2u+1)^2=4u^2+4u+1$ で

$6u^2+6u+3=(4u^2+4u+1)\times\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}$ より，点 Q は曲線 $x=\dfrac{3}{2}y^2+\dfrac{3}{2}$ 上の点である.

このとき $x'=3y$ より Q における接線は

$$x=3(2u+1)\{y-(2u+1)\}+6u^2+6u+3 \qquad \therefore \quad x=3(2u+1)y-6u^2-6u$$

となり，これが原点を通るとすると $0=3(2u+1)\times 0-6u^2-6u$ より $u=-1$, 0.

ここで接点が第1象限であるのは $u=0$ のときで，原点から曲線 $x=\dfrac{3}{2}y^2+\dfrac{3}{2}$ に引いた接線は $x=3y$ つまり $y=\dfrac{1}{3}x$ となり，このとき Q(3, 1) となる.

以上より ∠POQ の最小値を θ とすると，上記の P と Q を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta \iff 5=\sqrt{5}\sqrt{10}\cos\theta$$

より $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので求める最小値は $\dfrac{\pi}{4}$.

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ は，$f(x)$ が偶関数で $g(x)$ が奇関数である．

　このとき，

$$f(f(x)),\ f(g(x)),\ g(f(x)),\ g(g(x))$$

の中で偶関数はいくつあるか答えよ．

【答】 3

【解答】 $f(x)$ が偶関数で $g(x)$ が奇関数なので $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$ を満たす．

　ここで $f(f(x))$，$f(g(x))$，$g(f(x))$，$g(g(x))$ を順に $F_1(x)$，$F_2(x)$，$F_3(x)$，$F_4(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
F_1(-x) &= f(f(-x)) = f(f(x)) = F_1(x),\\
F_2(-x) &= f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = F_2(x),\\
F_3(-x) &= g(f(-x)) = g(f(x)) = F_3(x),\\
F_4(-x) &= g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x)) = -F_4(x)
\end{aligned}$$

となるので，偶関数の個数は 3.

第43講　必要条件からヒントを得る

n を1以上の整数とする.
　すべての n に対して $12n^3+108n^2+336n+360$ を割り切る最大整数を求めよ.

【答】 24

【解答】 $12n^3+108n^2+336n+360$ に $n=1,\ 2,\ 3$ を代入して

　$816=2^4\times3\times17$, $1560=2^3\times3\times5\times13$, $2664=2^3\times3^2\times37$ となることより, $n=1,\ 2,\ 3$ に対して, $12n^3+108n^2+336n+360$ を割り切る最大整数は $2^3\cdot3=24$ である.

　ここで $12n^3+108n^2+336n+360=12n^2(n+1)+24\times4n^2+24\times14n+24\times15$ であることと, n と $n+1$ は一方が必ず偶数であるから $12n^2(n+1)$ は24の倍数になることより, すべての1以上の整数 n に対して $12n^3+108n^2+336n+360$ は24の倍数.

　よって求める最大整数は24.

第 44 講　二項係数

n を自然数とする．

$$ {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} $$

を簡単にせよ．

【答】　2^{2n}

【解答】　$S = {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
2S &= {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-2} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} \\
&\quad + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-2} + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_4 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 \\
&= {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-2} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} \\
&\quad + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-3} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-1} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1} \\
&= 2^{2n+1}
\end{aligned}
$$

となるので，$S = 2^{2n}$．

第45講　コーシー・シュワルツの不等式

$x+2y+3z=1$ を満たす正の実数 x, y, z に対して
$$\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}$$
の最大値を求めよ.

【答】 $\sqrt{6}$

【解答】 実数 a, b, c, α, β, γ に対して
$$(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$
が常に成り立ち，等号成立条件は $a\beta=b\alpha$ かつ $b\gamma=c\beta$ かつ $c\alpha=a\gamma$ のときで，特にこれら6つの実数を正とした場合の等号成立条件は $a:b:c=\alpha:\beta:\gamma$ となる.

$a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}$, $\alpha=\sqrt{x}$, $\beta=\sqrt{2y}$, $\gamma=\sqrt{3z}$ とすると
$$\left(1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2y}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3z}\right)^2 \leqq \left\{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\right\}\left\{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2y}\right)^2+\left(\sqrt{3z}\right)^2\right\}$$
つまり $\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}\right)^2 \leqq 6(x+2y+3z)$ が成立して，$x+2y+3z=1$ より
$\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z} \leqq \sqrt{6}$ を得る.

このときの等号成立条件は $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}=\sqrt{x}:\sqrt{2y}:\sqrt{3z}$ より $x=y=z$ となり，これと $x+2y+3z=1$ より $x=y=z=\dfrac{1}{6}$ となる.

よって $x=y=z=\dfrac{1}{6}$ のとき $\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}$ の最大値は $\sqrt{6}$.

第 46 講　対称性

異なる 3 つの実数 α，β，γ が

$$2\alpha^3-3\alpha^2=2\beta^3-3\beta^2=2\gamma^3-3\gamma^2 \text{ かつ } \alpha<\beta<\gamma$$

を満たしているとき $\beta-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ の取り得る値の範囲を求めよ．

【答】　$-\dfrac{3}{4}<\beta-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}<\dfrac{3}{4}$

【解答】　条件より α，β，γ は x の 3 次方程式 $2x^3-3x^2=k$ つまり $2x^3-3x^2-k=0$ の異なる 3 つの実数解と考えることができる．

$f(x)=2x^3-3x^2$ とおくと，$f'(x)=6x^2-6x$ より

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗

でなので $-1<k<0$ である．

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の x 座標が α，β，γ なので，$\alpha<\beta<\gamma$ であることと $-1<k<0$ より $0<\beta<1$ となることがわかる．

また，解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}$ なので $\alpha+\gamma=\dfrac{3}{2}-\beta$ となるから

$\beta-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{3}{2}\beta-\dfrac{3}{4}$ であることと $0<\beta<1$ より $-\dfrac{3}{4}<\beta-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}<\dfrac{3}{4}$ である．

第 47 講　x の整式を求める

x の整式 $f(x)$ がすべての x に対して

$$f(x+2)-f(x)=x(x+1)$$

を満たしている．$f(0)=0$ のとき $f(x)$ を求めよ．

【答】 $\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{6}x$

【解答】 $f(x)$ が定数関数とすると，$f(0)=0$ よりすべての x に関して $f(x)=0$ なので $f(x+2)-f(x)=0$ となり，これは恒等的に $x(x+1)$ と等しくなることはない．

$f(x)$ が n 次関数（n は 1 以上）とすると

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots \quad (a\neq 0)$$

と表すことができる．

このとき

$$\begin{aligned} f(x+2)-f(x) &= \{a(x+2)^n+b(x+2)^{n-1}+\cdots\}-(ax^n+bx^{n-1}+\cdots) \\ &= \{a(x^n+2\cdot{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}+\cdots) \\ &\quad +b(x^{n-1}+2\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1x^{n-2}+\cdots)+\cdots\}-(ax^n+bx^{n-1}+\cdots) \\ &= 2anx^{n-1}+\{2an(n-1)+2b(n-1)\}x^{n-2}+\cdots \end{aligned}$$

となり，これが恒等的に $x(x+1)=x^2+x$ と等しいので

$$n-1=2 \text{ かつ } 2an=1 \text{ かつ } 2an(n-1)+2b(n-1)=1$$

より $n=3$，$a=\dfrac{1}{6}$，$b=-\dfrac{1}{4}$ を得る．

よって，$f(0)=0$ より $f(x)=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{4}x^2+cx$（$c$ は定数）とおけ，このとき

$$\begin{aligned} f(x+2)-f(x) &= \left\{\frac{1}{6}(x+2)^3-\frac{1}{4}(x+2)^2+c(x+2)\right\}-\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+cx\right) \\ &= x^2+x+2c+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

であり，これが x^2+x と恒等的に等しいので $2c+\dfrac{1}{3}=0$ より $c=-\dfrac{1}{6}$．よって

$f(x)=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{6}x$.

以上より，求める $f(x)$ は $\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{6}x$ である．

第48講　身の回りの数学

北海道にある利尻空港から，実験用飛行機を以下の条件で飛ばした．

(A)　離陸後は高度を一定に保ち，24時間ちょうどで地球を1周する．

(B)　あらかじめ設定された高度に達してから，地球を1周したときの軌道は円となり（この軌道を「周回軌道」とよぶことにする），その円の中心は地球の中心と一致している．

(C)　周回軌道に入ったのは，北緯45度東経141度で，その瞬間に飛行機は真西に向って進んでいる．

(D)　飛行機はどんな苛酷な条件のもとでも一定の高度と速度を保つことができる．

地球を完全な球とみなすこととして，周回軌道に入ったときに利尻空港ではちょうど正午であり，周回軌道の半径は地球の半径と同じとみなせることとして，以下の各問いに答えよ．

(1)　周回軌道に入ってからはじめて赤道を通過するときの利尻空港での時刻を求めよ．

(2)　周回軌道に入ってからはじめて東経96度線を通過するときの利尻空港での時刻として最もふさわしいものを以下の5つから選べ．

①　14時00分　②　14時20分　③　14時40分　④　15時00分　⑤　15時20分

ただし，必要があれば$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.732$，$\sqrt{5}=2.236$，$\sqrt{6}=2.449$，$\sqrt{7}=2.646$であること，また以下の三角関数表(角の単位は度数法)を利用してもよい．

度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦	度	正弦
1	0.018	6	0.105	11	0.191	16	0.276	21	0.358	26	0.438	31	0.515	36	0.588	41	0.656
2	0.035	7	0.122	12	0.208	17	0.292	22	0.375	27	0.454	32	0.530	37	0.602	42	0.669
3	0.052	8	0.139	13	0.225	18	0.309	23	0.391	28	0.469	33	0.545	38	0.616	43	0.682
4	0.070	9	0.156	14	0.242	19	0.326	24	0.407	29	0.485	34	0.559	39	0.629	44	0.695
5	0.087	10	0.174	15	0.259	20	0.342	25	0.423	30	0.500	35	0.574	40	0.643	45	0.707

【答】 (1)　18時　　(2)　②

【解答】 地球を中心O(0，0，0)，半径1の球とする．また，周回軌道の半径は地球の半径と同じとみなせるので周回軌道の半径も1であると仮定し，赤道を$x^2+y^2=1$かつ$z=0$とし，周回軌道上の北緯45度東経141度の上空を$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$とすると，周回軌道は$x^2+y^2+z^2=1$かつ$z=y$と表すことができる．

(1)　$x^2+y^2+z^2=1$かつ$z=y$と$x^2+y^2=1$かつ$z=0$を連立することで周回軌道に入ってからはじめて赤道を通過する地点がB(1，0，0)であることがわかる．

ここで$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\neq 0$，$\angle\mathrm{BOA}=\frac{\pi}{2}$であるから周回軌道に入ってから

$$24\times\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}=6$$時間後に赤道部分を通過することになる．

よって求める時刻は18時．

(2)　141－96＝45 なので $x^2+y^2+z^2=1$ かつ $z=y$ と $y=x$ を連立することで周回軌道に入ってからはじめて東経 96 度線を通過するときの地点が $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ であることがわかる．

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\angle\mathrm{COA}$$

$$\iff\quad \frac{2}{\sqrt{6}}=\cos\angle\mathrm{COA}$$

より $\sin\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0.5773\cdots$ となることと，$\angle\mathrm{COA}$ は鋭角なので三角関数表より $\angle\mathrm{COA}$ はおよそ $\dfrac{35}{180}\pi$ と考えられる．

よって周回軌道に入ってからおよそ $24\times\dfrac{\frac{35}{180}\pi}{2\pi}=2.333\cdots$ 時間後，つまり 2 時間 20 分後に東経 96 度線を通過することになるので，通過する時刻は 14 時 20 分の②．